



Försättsblad Prov Original

Kurskod	MA130G	Provkod	S100	Tentamensdatum	2018 - 03 - 19
Kursnamn	Matematik GR (A), Differentialkalkyl				
Provnamn	Tentamen				
Ort	Sundsvall				
Termin	V18				
Ämne	Matematik				



Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen i Differentialkalkyl, MA129G/MA130G

Datum: 2018-03-19

Lärare: Andreas Lind (070-6890822)

Hjälpmiddel: Penna, linjal, godkänd miniräknare och Matematisk formelsamling upplaga 4

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida. Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p.

1. Beräkna, utan att använda l'Hôspitals regler, följande gränsvärden om de existerar

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x+1| - |1-2x|}{|x-2|}$. (1 p)

(b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + 4x + 4}$. (1 p)

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 + 2x^2} - \sqrt{x^4 - 4x^2}$. (1 p)

2. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{e^{(x-2)^2}}{x-2}.$$

- (a) Bestäm maximal definitionsmängd för f . (0,5 p)
(b) Bestäm alla eventuella asymptoter för f . (1 p)
(c) Beräkna f' och ange ekvationen för tangenten då $x = 3$. (1,5 p)
3. (a) Definiera funktionen $y = \arctan(x)$ med angivande av definitions- och värdemängd. (1 p)
(b) Härled derivatan för $y = \arctan(x)$, dvs visa att $y' = \frac{1}{1+x^2}$. (2 p)
4. (a) Visa att ekvationen $xe^x = 1$ har exakt en rot i $[0, 1]$. (1 p)
(b) Betrakta ekvationen $xe^x = 1$. Använd Newton-Raphsons metod för att hitta ett närmevärde för roten i $[0, 1]$ med ett fel mindre än $5 \cdot 10^{-5}$. Använd startvärdet $x_0 = 0,5$. (2 p)

$$\text{Newton-Raphsons metod: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5. Skissera kurvan $r = \sin(3\theta)$. (2 p)
6. Hitta tangentens ekvation för $\ln(x/y) + \sqrt{xy} = 1$ i $(1, 1)$. (1 p)
7. Beräkna följande gränsvärden på valfritt sätt

(a) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{te^{at}} \right)$, $a \in \mathbb{R}$. (1 p)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2(x) - 3x^2 + x^4}{x^6}$. (1 p)

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (1 p)

8. Låt

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Skissera $y = f(x)$ med avseende på konvexitet/konkavitet, inflektionspunkter, max/min-punkter och asymptoter. (3 p)

9. Låt funktionen f vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-1} & \text{om } x > 1 \\ b \cdot x^c & \text{om } 0 < x \leq 1 \end{cases},$$

där a, b och c är reella konstanter.

(a) För att funktionen f skall kunna vara kontinuerlig i $x = 1$ måste $a = \sqrt{2}$. Förklara varför! (1 p)

(b) Låt $a = \sqrt{2}$. Bestäm konstanterna b och c så att funktionen blir deriverbar i $x = 1$. (2 p)

Lycka till!