# Försättsblad Prov Original

| Kurskod | Provkod | Tentamensdatum |
|---|---|---|
| MA074G | M100 | 2018-04-03 |

| | |
|---|---|
| Kursnamn | Matematik GR (A), Matematisk statistik och linjär algebra |
| Provnamn | Skriftlig tentamen |
| Ort | Sundsvall |
| Termin | V18 |
| Ämne | Matematik |

8982538474

0027389

**Tentamen i matematik** **Mittuniversitetet, MOD**

Matematisk statistik och linjär algebra (MA074G) 3 april 2018

Stefan Borell, Anders Holmbom, Sam Lodin, Marianne Olsson Lindberg

---

*Skrivtid:* 5 timmar

*Hjälpmedel:* Matematisk formelsamling (Upplaga 4) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p.

---

## Del 1: Linjär algebra

1. Givet är vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm konstanten $a$ sådan att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta. (1 p)

   b) Bestäm alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$. (1 p)

   c) Beräkna arean av den triangel som bestäms av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$. (1 p)

2. Låt $\pi$ vara planet som ges av $x + 2y + 3z = 3$ och låt $L$ vara linjen vars parameterform anges nedan.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

   a) Bestäm vinkeln mellan $L$ och normalen till $\pi$. (1,5 p)

   b) Bestäm den punkt där linjen skär planet. (1,5 p)

3. För vilka värden på talet $a$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + a^2y + z = 3 \\ ax + 4y + z = 3 \\ x - 3y = a \end{cases}$$

   a) exakt en lösning? (1 p)

   b) ingen lösning? (1 p)

   c) oändligt många lösningar? Lös systemet i detta fall. (1 p)

4. Lös matrisekvationen $X = B - CX$, där

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (3\,\text{p})$$

## Del 2: Matematisk statistik

5. a) I en hamn räknade man för varje dygn under en månad ankommande lastfartyg. Man erhöll följande antal:

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 5 & 2 & 7 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Gör en frekvenstabell, rita upp ett stolpdiagram och ange typvärde. Bestäm även stickprovets variationsbredd, median, medelvärde och standardavvikelse. (3 p)

b) Ett avståndsinstrument ger mätvärden (enhet: meter) som är oberoende och normalfördelade med väntevärdet $\mu$ lika med det sanna avståndet och med den kända standardavvikelsen $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ m. Man har gjort fyra mätningar av avståndet mellan två punkter:

1132,155 1132,158 1132,145 1132,163.

Bestäm ett 99 % konfidensintervall för avståndet $\mu$. (1 p)

6. a) Elförbrukningen i kWh vid en kemisk tillverkningsprocess varierar från dag till dag som en stokastisk variabel $\xi$ som är $\mathrm{N}(180,5)$. Beräkna sannolikheten att elförbrukningen är minst 170 kWh men högst 200 kWh under en viss dag. (1,5 p)

b) På en fröpåse står "grobarhet 75 %". Om man sår 12 frön, hur stor är sannolikheten att mellan 65 % och 90 % av dem gror? (1,5 p)

7. a) Den kontinuerliga stokastiska variablen $\xi$ har följande frekvensfunktion.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}x^2(2-x) & \text{om } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna sannolikheten för att $\xi$ är positiv. (1 p)

b) I ett brädspel inleder en spelare sin omgång med att kasta två sexsidiga tärningar och notera vilken tärning som visar det minsta antalet ögon. Därefter ska spelaren flytta sin pjäs lika många steg som det noterade antalet $\nu$. Bestäm fördelningsfunktionen till $\nu$. Vad är sannolikheten att spelaren får flytta sin pjäs åtminstone fyra steg? (2 p)

8. I en ask finns åtta glödlampor. Tre av lamporna är trasiga medan de övriga fungerar. Kalle väljer slumpmässigt ut tre lampor och kontrollerar två av dem. Det visar sig att den ena lampan fungerar medan den andra är trasig. Den tredje lampan förblir okontrollerad. Kalle ger de tre lamporna till Stina. En tid senare ska Stina byta glödlampa och väljer på måfå en av de tre lamporna hon har fått av Kalle.

a) Vad är sannolikheten att den valda lampan fungerar, givet att den okontrollerade lampan fungerar? (1 p)

b) Vad är den totala sannolikheten för att lampan fungerar? (1 p)

Lycka till!

# Formler matematisk statistik

## Diskreta fördelningar

**Binomialfördelningen** $X$ är $\mathrm{Bin}(N,p)$ där $0 < p < 1$ och $N \in \mathbb{N}$ om

$$p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

$E(X) = Np$, $V(X) = Np(1-p)$

**Hypergeometriska fördelningen** Låt $0 < p < 1$ och $N, n \in \mathbb{N}$ vara sådana att $2 \leq N$, $n < N$ och $Np \in \mathbb{N}$. $X$ är $\mathrm{Hyp}(N,n,p)$ om

$$p_X(k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad 0 \leq k \leq Np, \quad 0 \leq n-k \leq N(1-p).$$

$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

**Poissonfördelningen** $X$ är $\mathrm{Po}(\mu)$ där $\mu > 0$ om

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = \mu$, $V(X) = \mu$

## Kontinuerliga fördelningar

**Likforming fördelning (Rektangelfördelning)** $X$ är $\mathrm{U}(a,b)$ där $a < b$ om

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{för } a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

**Exponentialfördelningen** $X$ är $\mathrm{Exp}(\lambda)$ där $\lambda > 0$ om

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

**Normalfördelningen** $X$ är $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ där $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ om

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$