Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA073G	T100	2018-04-03

Kursnamn	Matematik GR (A), Linjär algebra I
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	V18
Ämne	Matematik

8982538474 0027081

Tentamen i matematik **Mittuniversitetet**

Linjär algebra (MA073G/MA075G) MOD

3 april 2018 Sam Lodin

Marianne Olsson Lindberg

Skrivtid: 5 timmar

Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 4) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p.

---

1. (a) Bestäm a så att vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}a\\-1\\4\end{bmatrix}$ blir vinkelräta. (1 p)

   (b) Bestäm alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot både $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$. (1 p)

   (c) Beräkna arean av triangeln som bestäms av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$. (1 p)

2. Låt π vara planet $x + 2y + 2z = 3$ och låt L vara linjen $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

   (a) Bestäm vinkeln mellan L och normalen till π. (1,5 p)

   (b) Bestäm den punkt där linjen skär planet. (1,5 p)

3. Låt A, B och C vara tre inverterbara matriser givna av

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 3\\3 & -1 & 4\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\-2 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ och } C = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

   Bestäm matrisen X så att $CA^{-1}(X + B)B^{-1} = C(B^{-1} + (BA)^{-1})$.

   (a) Bestäm inversen till B. (1 p)

   (b) Bestäm matrisen X så att $CA^{-1}(X + B)B^{-1} = C(B^{-1} + (BA)^{-1})$. (2 p)

4. För vilka värden på a har ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + a^2y + z = 3 \\ ax + 4y + z = 3 \\ x - 3y = a \end{cases}$

   (a) exakt en lösning? (1 p)

   (b) ingen lösning? (1 p)

   (c) oändligt många lösningar? Lös systemet i detta fall. (1 p)

5. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

(3 p)

6. Låt följande vektorer vara givna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Visa att vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$. (1,5 p)

   (b) Skriv vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av de givna vektorerna. (1,5 p)

7. (a) Bestäm en parameterekvation för skärningslinjen mellan de två planen $x - y - 3z - 7 = 0$ och $3x + 2y + z - 6 = 0$. (1,5 p)

   (b) Bestäm koordinaterna för den punkt på skärningslinjen som ligger närmast punkten $(1, -2, 2)$. (1,5 p)

8. Låt $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som fås genom att rotera vinkeln θ moturs kring x-axeln, $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som fås genom att rotera vinkeln $\frac{\pi}{2}$ radianer moturs kring y-axeln och $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som fås genom att rotera vinkeln θ moturs kring z-axeln. Gör succesivt de rotationer som ges av T_1, T_2 och T_3. Vilket är det slutliga resultatet? (D.v.s. ange standardmatrisen för avbildningen $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ och tolka resultatet geometriskt.) (3 p)

Lycka till!