Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

# Försättsblad Prov Original

| Kurskod | Provkod | Tentamensdatum |
|---|---|---|
| MA132G | S100 | 2018-06-07 |

| | |
|---|---|
| Kursnamn | Matematik GR (A), Integralkalkyl |
| Provnamn | Tentamen |
| Ort | Sundsvall |
| Termin | V18 |
| Ämne | Matematik |

8982538474

0027146

Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

# Tentamen i Integralkalkyl, MA131G/MA132G

Datum: 2018-06-07
Lärare: Andreas Lind (070-6890822)
Hjälpmedel: Penna, linjal, godkänd miniräknare och Matematisk formelsamling upplaga 4

**Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida. Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p.**

1. Bestäm eller beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)dx.$ (1 p)

   (b) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx.$ (1 p)

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$ (1 p)

2. (a) Låt $f(x) = \sqrt{2x}$ vara en funktion definierad på intervallet $[0, 4]$. Beräkna volymen för den kropp som genereras av att rotera $f(x)$ kring $x$-axeln. (1 p)

   (b) Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 \leq 0$$

   roterar kring $y$-axeln. (2 p)

*För full poäng krävs en bild, samt en förklaring vilken metod ni använder i respektive uppgift.*

3. Låt $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ vara en funktion definierad på intervallet $[0, \ln(2)]$.

   (a) Genom att betrakta funktionsgrafen för $f(x)$ som en kurva, beräkna dess båglängd. (1,5 p)

   (b) Beräkna rotationsytan för $f(x)$ när man roterar kurvan kring $x$-axeln. (1,5 p)

4. (a) Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$\begin{cases} (x+1)(x+2)y' - y = 1 \quad, \ x > -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

   (1,5 p)

   (b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 1.$$

   (1,5 p)

5. Avgör om följande integraler konvergerar eller divergerar. Då integralen konvergerar, beräkna integralens värde.

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin(\sqrt{|x|})dx.$ (1,5 p)

   (b) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{6x+4}{x^3+x^2-2}dx.$ (1,5 p)

6. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' - y = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

   Den exakta lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$y(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2.$$

   Bestäm, med hjälp av utvidgade Eulers metod i 4 steg, en approximation av $y(2)$. I varje steg skall ni redovisa hur stort felet blir. (2 p)

   *Utvidgade Eulers metod:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ u_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2} \end{cases}.$$

7. Avgör om serierna i $(a)$ och $(b)$ konvergerar eller divergerar. Då serien konvergerar, beräkna vad serien konvergerar mot.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}.$ (1 p)

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^k.$ (1 p)

   (c) Ge ett exempel på en serie som divergerar. Motivera ditt svar. (0,5 p)

   (d) Ett nödvändigt villkor för konvergens av en serie är att termerna i serien går mot noll. Ge ett motexempel på varför detta kravet inte är tillräckligt. Motivera ditt svar. (0,5 p)

8. Betrakta summan

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n + j^2/n}.$$

Är detta under- eller översumman till någon integrand? Vilken är i så fall integranden och vilka är integrationsgränserna? Beräkna sedan serien

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n + j^2/n}.$$

(2 p)

9. (a) Definiera vad det betyder att en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar respektive divergerar. (1 p)

   (b) Beskriv en metod, eller ett test, för hur man kan avgöra hur en serie konvergerar. Använd detta testet på ett eget påhittat exempel för att illustrera denna metod. (Du får inte beskriva metoden från 7(d) och använda denna metod som exempel). (1 p)

*Tänk på att ta med så mycket detaljer som du bara kan. Vilka saker antar du? Osv.*

Lycka till!