Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
ET051G	T101	2018-06-01

Kursnamn	Elektroteknik GR (B), Signaler och system
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	V18
Ämne	Elektroteknik

Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Avdelningen för Informations- och kommunikationsteknik
Roger Olsson, Tel: 010-142 8698
E-post: Roger.Olsson@miun.se

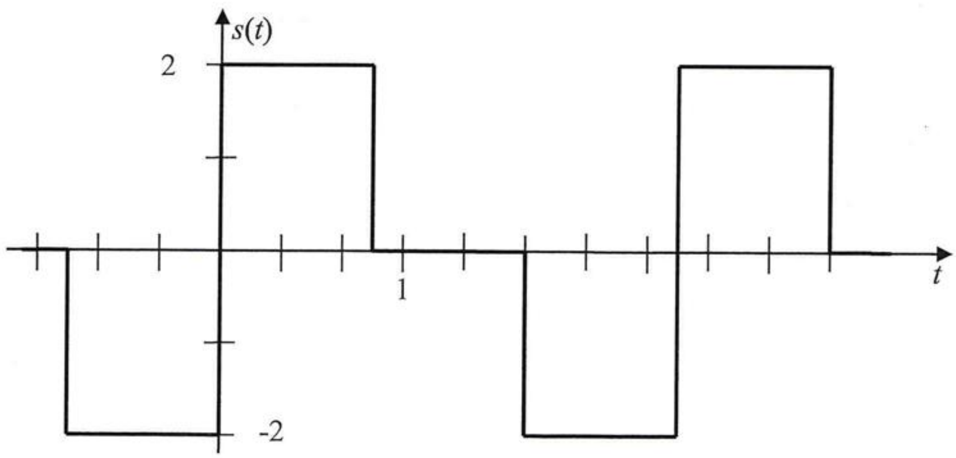
Tentamen
ET051G Signaler och system

Datum	2018-06-01
Skrivtid	5 timmar
Hjälpmedel:	Papper, penna, radergummi, miniräknare, Appendix (formelsamling) till boken Signaler och system (Svärdström), Formler & Tabeller till boken Från insignal till utsignal (Söderkvist), Physics Handbook, Sammanfattning av kursen (2004-02-26)

Anvisningar: Skriv tydligt. Varje uppgift med deluppgifter (a, b, etc.) ska ha ett eget blad, d.v.s. två uppgifter får inte stå på samma blad. Lämna lösningsberäkningar med motiveringar med svaren: Ett felaktigt svar, men med en klar och riktig tankegång, ger åtminstone chansen till någon poäng. Skriv principerna (teorin) för uppgiften, så att du har chans till poäng även om du inte klarar att lösa uppgiften. Motivera alltid dina lösningar och svar!

---

1. Låt $s(t)$ beteckna en periodisk signal enligt figuren nedan. Vi låter signalen $x(t) = 2 \cdot s(t) + 3 \cdot \sin(4\pi t/7 + 0.2)$ passera ett idealt lågpassfilter med gränsfrekvens $f_c = 1.5$ Hz.



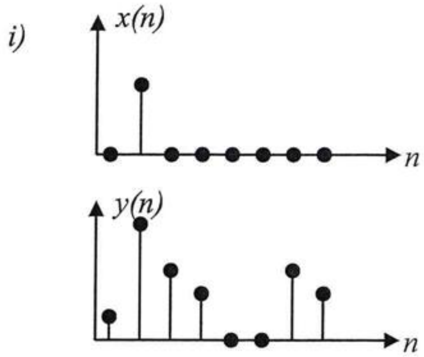
a) Bestäm perioden för insignalen $x(t)$. (2p)

b) Vilka frekvenser finns det i utsignalen $y(t)$från filtret? (2p)

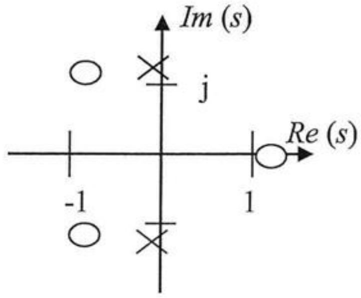
c) Beräkna det likriktade medelvärdet för signalen $s(t)$. (1p)

2. När man arbetar med signaler och system vill man gärna ha system som är linjära och tidsinvarianta, LTI-system (skiftinvarianta för tidsdiskreta system), samt system som är stabila och kausala.
   a) Ange varför dessa egenskaper är viktiga. (1p)
   b) Vilka av följande system uppfyller dessa egenskaper (linjära, tidsinvarianta (skiftinvarianta), kausala och stabila)? För de öriga, skriv vilken egenskap som gör att de inte kvalificerar till denna grupp av system. Motivera svaren! (2p)

i)



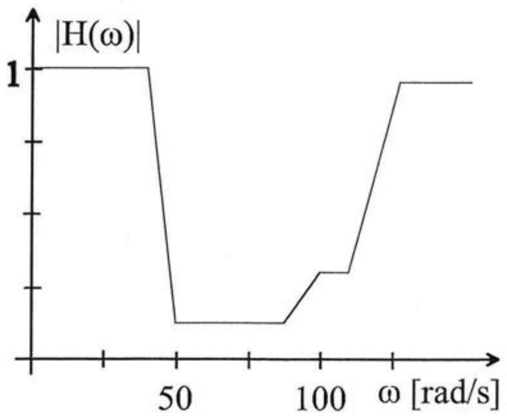
ii)

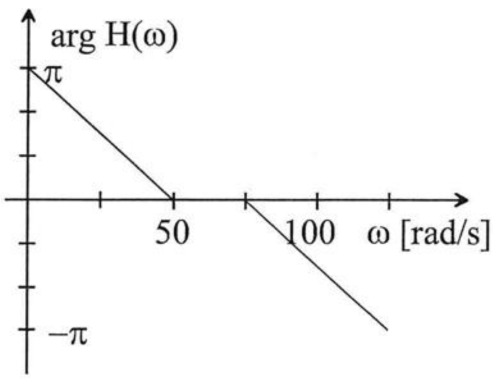


iii) $h(t) = e^{0.001t} \cdot cos(2\pi t + 0.2)$

iv) $y(n+1) = 1{,}1 \cdot y(n) + x(n+1) - 0{,}2 \cdot x(n-1)$

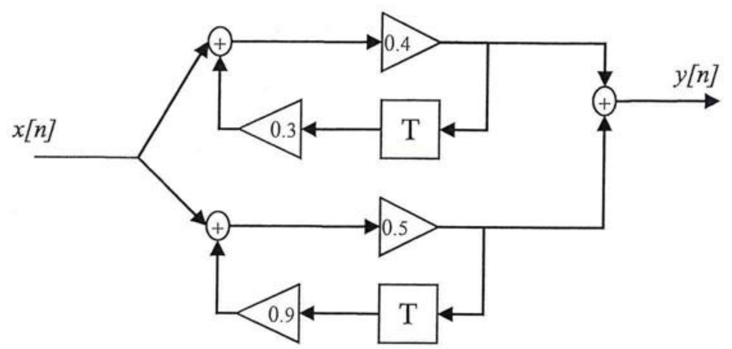
3. Ett linjärt, tidsinvariant system är definierat av frekvensgången och fasgången i figuren nedan.
   Systemet matas med insignalen $x(t) = 3\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{10}\right) + 1 + 4\sin(23\pi t)$.





   c) Bestäm utsignalen $y(t)$. (2p)
   d) Låt systemet matas med vitt brus med en effekttäthet om 5 W/(rad/s). Beräkna energitäthetsfunktionen för utsignalen $P_y(\omega) = |Y(\omega)|^2$. (1p)
   e) Vad för slags filter utgör systemet? (1p)

4. Ett tidsdiskret filter är givet i figuren nedan.



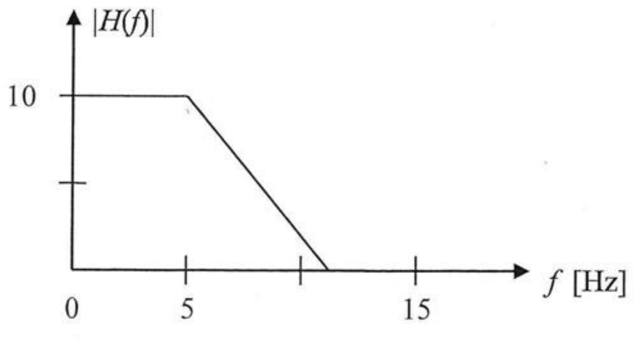
a) Detta filter är på så kallad parallell form. Identifiera delfiltrena (ringa in dem) och förklara fördelarna med denna struktur/form. (1p)
b) Ange filtrets överföringsfunktion $H(z)$. (2p)
c) Ange filtrets differensekvation. (1p)
d) Rita pol-nollställediagram. Är filtret stabilt? (2p)
e) Skissa filtrets frekvensgång (amplitudspektrum). (1p)
f) Ange vad för slags digitalt filter flödesschemat definierar *med avseende på impulssvar*. Motivera svaret! (1p)

[Om du inte har löst a-uppgiften, kan du använda $H(z) = \frac{z-1}{z^2-0.5z+0.25}$ i uppgifterna c)-e).]

5. Ett tidsdiskret filter ska konstrueras så att impulssvarets egenskaper bevaras från ett tidskontinuerligt referensfilter. Så sker om man samplar referensfiltrets impulssvar. Impulssvarets längd ska begränsas till 5 sampel. Samplingsfrekvensen ska vara $f_s = 20\text{Hz}$.

a) Ange impulssvaret $h[n]$ då referensfiltret ges av $H(s) = \frac{4s+5}{s^2+3s+2}$ (2p)
b) Beräkna utsignalens 4 första sampel när insignalen är $x[n] = 0.6^n \cdot \cos[n] \cdot u[n]$ (2p)
[Om du inte har löst a-uppgiften, kan du använda $h[n] = (-1/2)^n \cdot u[n]$.

c) Skissa det tidsdiskretat filtrets frekvensgång $|H(\Omega)|$ för $-2\pi < \Omega < -2\pi$, om det tidskontinuerliga filtrets *ges av figuren nedan* med samma samplingsfrekvens $f_s = 20\text{Hz}$.
Vad för slags problem kan uppstå med impulsinvariant metod? (1p)



6. Beakta en signal $x(t) = 2\cos\left(400\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin(600\pi t)$.

a) Med vilken frekvens f_s måste signalen samplas för att kunna rekonstrueras med samma frekvensinnehåll, och vilken gränsfrekvens f_c ska då ett idealt rekonstruktionsfilter ha? (2p)

b) Låt nu signalen $x(t)$samplas varefter de analoga samplen filtreras i ett idealt LP-filter med gränsfrekvens $f_c = 100$ Hz. Ange en samplingsfrekvens f_s som kan användas för att den återskapade signalens frekvenser ska vara 40 Hz och 60 Hz, och endast dessa. (2p)

Table 6.1. CTFT and Laplace transform pairs for several causal CT signals

CT signals $x(t)$	CTFT $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	Laplace transform $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$
(1) Impulse function $x(t)=\delta(t)$	1	1 ROC: entire s-plane
(2) Unit step function $x(t)=u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{s}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(3) Causal gate function $x(t)=u(t)-u(t-a)$	$(1-e^{-j\omega a})\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)$	$\frac{1}{s}(1-e^{-as})$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(4) Causal decaying exponential function $x(t)=e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$\frac{1}{a+s}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>-a$
(5) Causal ramp function $x(t)=tu(t)$	does not exist	$\frac{1}{s^2}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(6) Higher-order causal ramp function $x(t)=t^n u(t)$	does not exist	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(7) First-order time-rising causal decaying exponential function $x(t)=te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$ provided $a>0$.	$\frac{1}{(a+s)^2}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>-a$
(8) Higher-order time-rising causal decaying exponential function $x(t)=t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$ provided $a>0$	$\frac{n!}{(a+s)^{n+1}}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>-a$
(9) Causal cosine wave $x(t)=\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	$\frac{s}{\omega_0^2+s^2}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(10) Causal sine wave $x(t)=\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2+s^2}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(11) Squared causal cosine wave $x(t)=\cos^2(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega)+\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)]+\frac{1}{j2\omega}+\frac{j\omega}{2\left(4\omega_0^2-\omega^2\right)}$	$\frac{(2\omega_0^2+s^2)}{s\left(4\omega_0^2+s^2\right)}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(12) Squared causal sine wave $x(t)=\sin^2(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega)-\delta(\omega-2\omega_0)-\delta(\omega+2\omega_0)]+\frac{1}{j2\omega}-\frac{j\omega}{2\left(4\omega_0^2-\omega^2\right)}$	$\frac{2\omega_0^2}{s\left(4\omega_0^2+s^2\right)}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>0$
(13) Causal decaying exponential cosine function $x(t)=\exp(-at)\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$ provided $a>0$	$\frac{a+s}{(a+s)^2+\omega_0^2}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>-a$
(14) Causal decaying exponential sine function $x(t)=\exp(-at)\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$ provided $a>0$	$\frac{\omega_0}{(a+s)^2+\omega_0^2}$ ROC: $\mathrm{Re}\{s\}>-a$

Table 13.1. Unilateral z-transform pairs for several causal DT sequences

DT sequence $x[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz$	z-transform with ROC $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$
(1) Unit impulse $x[k] = \delta[k]$	1, ROC: entire z-plane
(2) Delayed unit impulse $x[k] = \delta[k-k_0]$	z^{-k_0}, ROC: entire z-plane, except $z = 0$
(3) Unit step $x[k] = u[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$
(4) Exponential $x[k] = \alpha^k u[k]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
(5) Delayed exponential $x[k] = \alpha^{k-1}u[k-1]$	$\frac{z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1}{z-\alpha}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
(6) Ramp $x[k] = ku[k]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$
(7) Time-rising exponential $x[k] = k\alpha^k u[k]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
(8) Causal cosine $x[k] = \cos(\Omega_0 k)u[k]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}} = \frac{z[z-\cos\Omega_0]}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$
(9) Causal sine $x[k] = \sin(\Omega_0 k)u[k]$	$\frac{z^{-1}\sin\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}} = \frac{z\sin\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$
(10) Exponentially modulated cosine $x[k] = \alpha^k\cos(\Omega_0 k)u[k]$	$\frac{1-\alpha z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2\alpha z^{-1}\cos\Omega_0+\alpha^2 z^{-2}} = \frac{z[z-\alpha\cos\Omega_0]}{z^2-2\alpha z\cos\Omega_0+\alpha^2}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
(11) Exponentially modulated sine I $x[k] = \alpha^k\sin(\Omega_0 k)u[k]$	$\frac{\alpha z^{-1}\sin\Omega_0}{1-2\alpha z^{-1}\cos\Omega_0+\alpha^2 z^{-2}} = \frac{\alpha z\sin\Omega_0}{z^2-2\alpha z\cos\Omega_0+\alpha^2}$, ROC: $\lvert z\rvert > \alpha$
(12) Exponentially modulated sine II $x[k] = r\alpha^k\sin(\Omega_0 k+\theta)u[k]$, with $\alpha \in R$.	$\frac{A+Bz^{-1}}{1+2\gamma z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}} = \frac{z(Az+B)}{z^2+2\gamma z+\gamma^2}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert^{(a)}$

[a] Where $r = \sqrt{\frac{A^2\alpha^2+B^2-2AB\gamma}{\alpha^2-\gamma^2}}$, $\Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-\gamma}{\alpha}\right)$, and $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{B-A\gamma}\right)$.

Table 13.2. Properties of the z-transform for transform pairs $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, ROC: R_x; $x[k]u[k] \xleftrightarrow{z} X^{(c)}(z)$, ROC: R_x; $x_1[k] \xleftrightarrow{z} X_1(z)$, ROC: R_1; $x_2[k] \xleftrightarrow{z} X_2(z)$, ROC: R_2

Properties	Time domain	z-domain	ROC
Linearity	$a_1x_1[k] + a_2x_2[k]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	at least $R_1 \cap R_2$
Time scaling	$x^{(m)}[k]$ for $m = 1, 2, 3, \ldots$	$X(z^m)$	$(R_x)^{1/m}$
Time shifting (non-causal)	$x[k-m]$	$z^{m}X(z)$	
Time shifting (causal)	$x[k-m]u[k-m]$	$z^{m}X^{(c)}(z)$	R_x, except for the possible deletion or addition of $z = 0$ or $z = \infty$
	$x[k+m]u[k]$	$z^m X^{(c)}(z) - z^m \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}$	
	$x[k-m]u[k]$	$z^{-m}X^{(c)}(z) + z^{-m}\sum_{k=1}^{m} x[-k]z^k$	
Frequency shifting	$e^{j\Omega_0 k}x[k]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	R_x
Time differencing	$x[k] - x[k-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	R_x, except for the possible deletion of the origin
Time accumulation	$y[k] = \sum_{m=0}^{k} x[m]$ [a]	$\frac{z}{z-1}X(z)$	$R_x \cap (\lvert z\rvert > 1)$
z-domain differentiation	$kx[k]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R_x
Time convolution	$x_1[k] * x_2[k]$	$X_1(z)X_2(z)$	at least $R_1 \cap R_2$
Initial-value theorem		$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$	provided $x[k] = 0$ for $k < 0$
Final-value theorem		$x[\infty] = \lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	provided $x[\infty]$ exists

[a] Provided that the sequence $y[k]$ has a finite value for all k.