



### Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
M A 1 1 8 G	T 1 0 0	2 0 1 8 - 0 6 - 1 2
Kursnamn	Matematik GR (A), Analys för ingenjörer	
Provnamn	Tentamen	
Ort	Sundsvall	
Termin	V18	
Ämne	Matematik	

Skriptid: 5 timmar

Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 4) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p.

Samtliga gränsvärdesberäkningar ska baseras på de gränsvärdesregler och standardgränsvärden som ingår i kursen.

1. Beräkna följande gränsvärden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-2)(4x+1)}$  (1 p)

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)}{x}$  (1 p)

2. a) Beräkna derivatan av  $f(x) = 2x^2 - x$  genom att beräkna gränsvärdet som definierar derivatan. (1,5 p)

b) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan

$$y = \frac{\arctan(\frac{x}{2} - 1)}{x}$$

i den punkt på kurvan som ges av  $x = 4$ . (1,5 p)

3. Låt  $(x_0, y_0)$  vara en punkt på kurvan  $x^2 + y = 4$  sådan att  $0 < x_0 < 2$ . Forma sedan en fyrhörning med hörn i punkterna  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(x_0, 0)$  och  $(x_0, y_0)$ . Vilken är den maximala arean av en sådan fyrhörning? (3 p)

4. Betrakta funktionen  $f$  som ges av

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(4x+1)}$$

a) På vilka intervall är  $f$  avtagande? (1,5 p)

b) Undersök funktionen  $f$  och gör en skiss av grafen  $y = f(x)$ .  
*Grafens utseende ska motiveras av undersökningen!* (1,5 p)

c) Bestäm alla primitiva funktioner till  $f$ . (1,5 p)

5. a) Beräkna integralen  $\int_0^1 x(1-x^2)^{20} dx$ . (1 p)

b) Bestäm talet  $a$  sådant att  $\int_0^a xe^{x/a} dx = 2$ . (1,5 p)

6. En boll kastas från ett hustak som är 30 m över marken. Låt  $y(t)$  beskriva bollens höjd över marken (i meter) med avseende på tiden  $t$  (i sekunder) från det att bollen kastas vid tiden  $t = 0$  till dess att den slår i marken. När bollen släpps är den 31,7 m över marken och dess uppåtriktade utgångshastighet är 2 m/s. Man tar endast hänsyn till tyngdaccelerationens inverkan på bollen under dess färd genom luften, vilket innebär att  $y''(t) = -g$ . Bestäm ett uttryck för hur lång tid det tar till dess att bollen slår i marken. (2,5 p)

7. Lös följande differentialekvationer.

a)  $x^2 y' = y, \quad y(0) = 2$  (1,5 p)

b)  $y'' + 3y' - 4 = 32x^2$  (2 p)

8. Kvadratfelet  $A(k)$  av en funktion  $f$  på intervallet  $[a, b]$  ges av

$$A(k) = \int_a^b (f(x) - k)^2 dx.$$

Den här uppgiften handlar om att undersöka det så kallade *minsta kvadratfelet* av funktionen  $f(x) = x^2$  på intervallet  $[-1, 1]$ .

a) Beräkna kvadratfelet  $A(k)$  av den angivna funktionen. (1 p)

b) Bestäm det tal  $k$  som ger det minsta kvadratfelet av den angivna funktionen, dvs bestäm det tal  $k$  som minimerar  $A(k)$ . (1 p)

c) Beräkna medelvärdet av den angivna funktionen och jämför med resultatet i b)-uppgiften. (1 p)

*Kom ihåg:* Medelvärdet av en funktion  $g(x)$  på ett intervall  $[a, b]$  är

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx.$$

Lycka till!