Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA115G	S100	2018-08-27

Kursnamn	Matematik GR (A), Algebra
Provnamn	Skriftlig tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	H18
Ämne	Matematik

8982538474

0027994

Tentamen i matematik
Algebra 3 hp (MA115G/MA127G)
27 augusti 2018

Mittuniversitetet
MOD
Pia Heidtmann

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 4) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p. Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

---

1. Fullständiga uträkningar krävs till följande uppgifter, det räcker ej att endast ange svaret.

   (a) Lös ekvationen $2x^2 - 12 = 5x$.

   (b) Förenkla $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ så mycket som möjligt.

   (c) Utveckla $(\frac{4x}{5} - 5y^3)^2$.

   (d) Låt a och b vara positiva reella tal. Förenkla uttrycket

   $$\frac{b}{a} + \frac{a}{a+b} + \frac{ab}{a(a+b)}$$

   så mycket som möjligt. (1 p)

2. Bestäm alla reella lösningar till följande olikheter:

   (a) $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x+1} \leq 0;$ (2 p)

   (b) $|2 + 9x| > \dfrac{7}{3}.$ (1 p)

3. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

   (a) $x + \sqrt{28 - 3x} = 8;$ (1,5 p)

   (b) $x^3 + 71x = 15x^2 + 105.$ (2 p)

4. (a) Skriv uttrycket

   $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{34}$$

   med hjälp av ett summatecken (Σ). (1 p)

   (b) Beräkna summan $\sum_{k=7}^{26} (k+1)^2$. (1 p)

5. Betrakta mängderna

$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 3x - 10 < 0\};$
$B = \{-2^n : n \in \mathbb{Z}, -2 < n \leq 2\};$
$C = \{-x^2 : x \in B\}.$

Bestäm följande mängder. Visa dina uträkningar!

(a) A;

(b) C;

(c) $A \cap B$;

(d) $A \setminus B$. (2 p)

6. (a) Primtalsfaktorisera heltalet 14742. Visa dina uträkningar! (1 p)

(b) Bestäm största gemensamma delaren SGD(14742, 7245).
Visa dina uträkningar! (1 p)

(c) Undersök om följande påståenden gäller för alla positiva heltal a, b och c. Om påståendet är sant krävs bevis, om det är falskt räcker det med ett motexempel.

i. $a|bc \Rightarrow a|c$. (1 p)

ii. $bc|a \Rightarrow b|a$. (1 p)

7. (a) Skriv komplexa talet

$$\frac{3-2i}{(6-4i)(2+i)}$$

på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (1 p)

(b) Givet komplexa talen $v = -1 + i$ och $w = 1 - 3i$. Bestäm $\left|\frac{v^{10}}{w^4}\right|$. (1,5 p)

(c) Lös ekvationen $6z^4 - 5z^3 + 18z^2 - 20z - 24 = 0$ där $z \in \mathbb{C}$.
Visa dina uträkningar! (2 p)

8. Funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av
$f(x) = x^2 - 6x + 2$ och $g(x) = 3x - 1$.

(a) Ange en funktionsregel för den sammansatta funktionen $f \circ g$ och förenkla så mycket som möjligt. (1 p)

(b) Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 - 6x + 2$ och bestäm med hjälp av detta värdemängden V_f till f. (1,5 p)

(c) Givet att g är surjektiv.
Visa att g är bijektiv och alltså har en invers $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (1 p)

(d) Ange en funktionsregel för $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (0,5 p)

A. Visa med ett induktionsbevis att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lycka till!

Tentamen i matematik
Algebra 3 hp (MA115G/MA127G)
27 augusti 2018

Mittuniversitetet
MOD
Pia Heidtmann

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 4) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p. Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

---

1. Fullständiga uträkningar krävs till följande uppgifter, det räcker ej att endast ange svaret.

   (a) Lös ekvationen $2x^2 - 12 = 5x$.

   (b) Förenkla $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ så mycket som möjligt.

   (c) Utveckla $(\frac{4x}{5} - 5y^3)^2$.

   (d) Låt a och b vara positiva reella tal. Förenkla uttrycket
   $$\frac{b}{a} + \frac{a}{a+b} + \frac{ab}{a(a+b)}$$
   så mycket som möjligt. (1 p)

2. Bestäm alla reella lösningar till följande olikheter:

   (a) $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x+1} \leq 0;$ (2 p)

   (b) $|2 + 9x| > \dfrac{7}{3}.$ (1 p)

3. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

   (a) $x + \sqrt{28 - 3x} = 8;$ (1,5 p)

   (b) $x^3 + 71x = 15x^2 + 105.$ (2 p)

4. (a) Skriv uttrycket
   $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{34}$$
   med hjälp av ett summatecken (Σ). (1 p)

   (b) Beräkna summan $\sum_{k=7}^{26} (k+1)^2$. (1 p)

5. Betrakta mängderna

$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 3x - 10 < 0\};$
$B = \{-2^n : n \in \mathbb{Z}, -2 < n \leq 2\};$
$C = \{-x^2 : x \in B\}.$

Bestäm följande mängder. Visa dina uträkningar!

(a) A;

(b) C;

(c) $A \cap B$;

(d) $A \setminus B$. (2 p)

6. (a) Primtalsfaktorisera heltalet 14742. Visa dina uträkningar! (1 p)

(b) Bestäm största gemensamma delaren SGD(14742, 7245). Visa dina uträkningar! (1 p)

(c) Undersök om följande påståenden gäller för alla positiva heltal a, b och c. Om påståendet är sant krävs bevis, om det är falskt räcker det med ett motexempel.

i. $a|bc \Rightarrow a|c$. (1 p)

ii. $bc|a \Rightarrow b|a$. (1 p)

7. (a) Skriv komplexa talet

$$\frac{3-2i}{(6-4i)(2+i)}$$

på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (1 p)

(b) Givet komplexa talen $v = -1 + i$ och $w = 1 - 3i$. Bestäm $\left|\frac{v^{10}}{w^4}\right|$. (1,5 p)

(c) Lös ekvationen $6z^4 - 5z^3 + 18z^2 - 20z - 24 = 0$ där $z \in \mathbb{C}$. Visa dina uträkningar! (2 p)

8. Funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2 - 6x + 2$ och $g(x) = 3x - 1$.

(a) Ange en funktionsregel för den sammansatta funktionen $f \circ g$ och förenkla så mycket som möjligt. (1 p)

(b) Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 - 6x + 2$ och bestäm med hjälp av detta värdemängden V_f till f. (1,5 p)

(c) Givet att g är surjektiv. Visa att g är bijektiv och alltså har en invers $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (1 p)

(d) Ange en funktionsregel för $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (0,5 p)

A. Visa med ett induktionsbevis att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lycka till!