Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA095G	T100	2018-08-22

Kursnamn	Matematik GR (A), Diskret matematik A
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	H18
Ämne	Matematik

MITTUNIVERSITETET

MOD

Tentamen 2018

MA095G & MA098G Diskret matematik (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 22 augusti 2018

Pia Heidtmann

Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. Maximalt poängantal är 24.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärde för betygen är:

E: 9p D: 10p C: 14p B: 18p A: 22p

Därutöver innehållar skrivningen en frivillig aspektuppgift som kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Hjälpmedel: Matematisk Formelsamling Ed. 4 (delas ut), skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Uppgift 1

(a) Låt positiva heltalet $s = \sum_{n=2}^{5} 2^{3n-1}$.

(i) Ange s som en summa utan summatecken.

(ii) Uttryck talet s i basen 2. [1p]

(b) Låt $M = \{d, i, \{m\}, a, t, h, s\}$. Ange om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera dina svar.

(i) $\{m\} \subseteq M$;

(ii) $\{m\} \in M$;

(iii) $\{m\} \in \mathcal{P}(M)$;

(iv) $\{m\} \cup M = M$. [1p]

Uppgift 2

(a) Betrakta följande påstående om ett heltal $n \geq 2$:

Om $3^n - 1$ är delbart med 4 så är n ett jämnt tal.

(i) Ange det kontrapositiva påståendet.

(ii) Är påståendet sant? Bevisa ditt svar. [2p]

(b) Beräkna $[4] \odot [3]^{-1}$ i $\mathbb{Z}_{19}$. [1p]

(c) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{967}$ till ekvationen $[41] \odot [x] = [1]$ i $\mathbb{Z}_{967}$. [2p]

Uppgift 3

Låt $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$ vara golv-funktionen

$$f(x) = \lfloor (x-1)/2 \rfloor.$$

(a) Beräkna $f(2)$ och $f(21)$.

(b) Är f *injektiv*?

(c) Är f *surjektiv*?

(d) Är f $O(x)$?

Motivera dina svar! [3p]

Uppgift 4

(a) Formulera *Dirichlets lådprincip.* [1p]

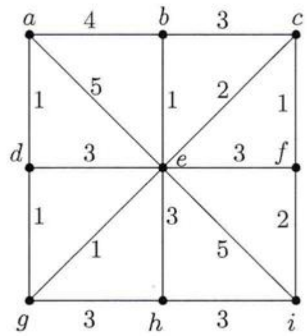
(b) Antag att vi slumpmässigt väljer en delmängd av positiva heltal. Hur stor måste delmängden vara, om vi vill vara säkra på, att vi har valt minst ett par av heltal a, b sådana att $19|(b-a)$? Motivera ditt svar! [1p]

Uppgift 5

(a) Bevisa att summan av gradföljden för en enkel graf är ett jämnt tal. [0,5p]

(b) Konstruera två icke-isomorfa enkla grafer med gradföljden $1, 2, 2, 3, 3, 3$ och förklara varför dina grafer inte är isomorfa. [1,5p]

(c) Använd *Dijkstras algoritm* för att bestämma en kortaste stig från hörn a till hörn i i följande viktade graf. Redovisa gången i lösningen, dvs. ur din lösning ska det framgå i vilken ordning hörnen behandlas, hur hörnen märks och hur märkena ändras när du arbetar dig igenom algoritmen.
Ange också kortaste stigens längd. [2p]



Uppgift 6

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

(i) reflexiv;

(ii) symmetrisk;

(iii) transitiv.

(b) Låt R vara relationen på mängden $S = \{a, b, c, d, e\}$ som endast innehåller följande 6 relaterade par:

$$cRc, \quad aRa, \quad aRb, \quad aRc, \quad bRc, \quad cRb.$$

(i) Rita en riktad graf som beskriver relationen R.

(ii) Relationen R är inte en ekvivalensrelation. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli en ekvivalensrelation. Motivera ditt svar!

(iii) Ange ekvivalensklasserna för ekvivalensrelationen från (b)(ii). [3p]

Uppgift 7

En talföljd definieras med rekursionsformeln

$$x_{n+1} = x_n + 3(n+1), \text{ för } n \geq 1,$$

och begynnelsevärdet $x_1 = 1$. [1p]

(a) Beräkna x_n för $n = 1, 2, 3$ och 4 med rekursionsformeln.

(b) Bevisa att $x_n = \dfrac{3n^2 + 3n - 4}{2}$ för alla $n \geq 1$. [2p]

Uppgift 8

En lärare ska välja en grupp med 5 studenter från en klass med 7 kvinnliga och 8 manliga studenter. På hur många sätt kan gruppen väljas om

(a) den ska bestå av tre män och två kvinnor? [1p]

(b) kvinnorna ska vara i majoritet? [1p]

Aspektuppgift

Bevisa med induktion att ett träd med n hörn har $n - 1$ kanter och använd sedan detta för att bevisa att en sammanhängande enkel graf med n hörn och $n - 1$ kanter är ett träd.

MID SWEDEN UNIVERSITY

MOD

Examination 2018

MA095G & MA098G Discrete Mathematics (English)

Time: 5 hours

Date: 22 August 2018

Pia Heidtmann

The compulsory part of this examination consists of 8 questions. The maximum number of points available is 24. The points for each part of a question are indicated at the end of the part in [ ]-brackets.

The final grade on the course is determined by how well the candidates demonstrate that they have met the learning outcomes on the course. Provided all learning outcomes have been met, the following guide values will be used to set the course grade:

E: 9p D: 10p C: 14p B: 18p A: 22p

The final question on the paper is the Aspect Question, it is optional and carries no value in terms of marks, but a good solution of this Aspect Question may raise a candidates grade by one grade.

The candidates are advised that they must always show their working, otherwise they will not be awarded full marks for their answers. The candidates are further advised to start each of the nine questions on a new page and to clearly label all their answers.

This is a closed book examination. No books, notes or mobile telephones are allowed in the examination room. Note that Mathematical Formula Collection Edition 4 is allowed on this tenta and will be available in the examination room.

Electronic calculators may be used provided they cannot handle formulas. The make and model used must be specified on the cover of your script.

GOOD LUCK!!

Question 1

(a) Consider the positive integer $s = \sum_{n=2}^{5} 2^{3n-1}$.

(i) Express s as a sum without using Σ-notation.

(ii) Give s in base 2. [1p]

(b) Let $M = \{d, i, \{m\}, a, t, h, s\}$. Justifying your answers, say whether the following are true or false.

(i) $\{m\} \subseteq M$;

(ii) $\{m\} \in M$;

(iii) $\{m\} \in \mathcal{P}(M)$;

(iv) $\{m\} \cup M = M$. [1p]

Question 2

(a) Consider the following proposition concerning an integer $n \geq 2$.

If $3^n - 1$ is divisible by 4 then n is an even number.

(i) Write down the contrapositive of this statement.

(ii) Is the proposition true? Justify your answer! [2p]

(b) Compute $[4] \odot [3]^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{19}$. [1p]

(c) Find all solutions $[x] \in \mathbb{Z}_{967}$ to the equation $[41] \odot [x] = [1]$ in $\mathbb{Z}_{967}$. [2p]

Question 3

Let $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$ be the floor function

$$f(x) = \lfloor (x-1)/2 \rfloor.$$

(a) Compute $f(2)$ and $f(21)$.

(b) Is f *one-to-one*?

(c) Is f *onto*?

(d) Is f $O(x)$?

Justify your answers! [3p]

Question 4

(a) State *the pigeonhole principle.* [1p]

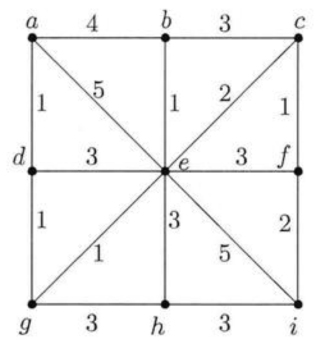
(b) Suppose we randomly select a subset of positive integers. How large must the subset be, if we want to make sure that we have chosen at least one pair of integers a, b such that $19|(b-a)$? Justify your answer. [1p]

Question 5

(a) Prove that the sum of the degree sequence of a simple graph is an even integer. [0.5p]

(b) Construct two non-isomorphic simple graphs with degree sequence $1, 2, 2, 3, 3, 3$ and explain why your two graphs are not isomorphic. [1.5p]

(c) Showing all your working, use *Dijkstra's algorithm* to find a shortest path from vertex a to vertex i in the weighted graph below. Take care to show how the vertices become labelled and how the labels change during the run of the algorithm. Finally, give the length of the shortest path. [2p]



Question 6

(a) Explain what it means for a relation R on a set S to be

(i) reflexive;

(ii) symmetric;

(iii) transitive.

(b) Let R be the relation on the set $S = \{a, b, c, d, e\}$ consisting of the following 6 related pairs only.

cRc, aRa, aRb, aRc, bRc, cRb.

(i) Draw a digraph representing the relation R.

(ii) The relation R is not an equivalence relation. Justifying your answer, find the smallest set of related pairs which must be added to R in order for it to become an equivalence relation.

(iii) Give the equivalence classes for the equivalence relation from (b)(ii). [3p]

Question 7

A sequence is given by the recurrence relation

$$x_{n+1} = x_n + 3(n+1) \text{ for } n \geq 1,$$

and the initial value $x_1 = 1$.

(a) Showing your working, use the recurrence relation to compute x_n for $n = 1, 2, 3$ and 4. [1p]

(b) Prove for all $n \geq 1$ that $x_n = \dfrac{3n^2 + 3n - 4}{2}$. [2p]

Question 8

A teacher must choose a group of 5 students from a class with 7 female and 8 male students. In how many ways can the group be chosen if

(a) it should consist of three males and two females? [1p]

(b) it should contain a majority of female students? [1p]

Aspect Question

Prove by induction that a tree on n vertices has $n - 1$ edges and hence use this to show that a connected simple graph on n vertices and $n - 1$ edges is a tree.