Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA093G	T100	2018-08-22

Kursnamn	Matematik GR (A), Fördjupningskurs i analys
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	H18
Ämne	Matematik

Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen i Fördjupningskurs i analys, MA092G/MA093G

Datum: 2018-08-22
Lärare: Andreas Lind (070-6890822)
Hjälpmedel: Penna, linjal, godkänd miniräknare och Matematisk formelsamling upplaga 4

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida. Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p.

1. (a) Använd formella definitionen för gränsvärden för att visa att $\lim_{x\to 2} 4x-7=1$ (2 p)

   (b) Beräkna på valfritt sätt följande gränsvärde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - e^x + \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

(2 p)

2. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ var definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{\sin(x)}{x} & x \geq 0 \\ bx+2 & x \in [-4,0) \\ \frac{x^2+3x-4}{x+4} & x < -4 \end{cases}.$$

Bestäm konstanterna $a, b \in \mathbb{R}$ så att f blir kontinuerlig på $\mathbb{R}$. (2 p)

3. (a) Använd Taylors sats för approximera $\sin(0,1)$ med hjälp av 4:e ordningens Taylorpolynom. Beräkna det approximerande värdet och uppskatta felets storlek. (1,5 p)

   (b) Använd Taylors sats för beräkna $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sin(x)}$ (1,5 p)

4. Beräkna följande integraler eller visa att de är divergenta

   (a) $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ (1,5 p)

   (b) $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}dx$ (1,5 p)

5. (a) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ konvergerar eller divergerar.

   (Ledning: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$*)* (1,5 p)

   (b) Avgör om serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)}$ konvergerar eller divergerar. (1,5 p)

6. Betrakta integralen nedan.

$$\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx.$$

   (a) Använd trapets- och mittpunktsmetoden för att approximera integralens värde genom att beräkna T_4 och M_4.

$$\text{Trapetsmetoden: } T_n = h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

$$\text{Mittpunktsmetoden: } M_n = h \cdot (f(m_1) + \cdots + f(m_n))$$

   (1,5 p)

   (b) Beräkna integralen exakt och avgör hur stort felet blir mot T_4 och M_4 från (a)-uppgiften. (1,5 p)

7. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem

$$y' = 1 - y \ , \ y(0) = 0.$$

   (a) Använde Eulers metod med steglängd $h = 1/4$ för att approximera $y(1)$.

$$\text{Eulers metod: } x_{n+1} = x_n + h \ , \ y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n)$$

   (1,5 p)

   (b) Bestäm det exakta värdet $y(1)$. (1,5 p)

8. (a) Skissera den i polära koordinater givna kurvan

$$r = \cos(2\theta) \ , \ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

   (1 p)

   (b) Det av kurvan inneslutna området delas av linjen $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ i två delar. Beräkna den mindre delens area. (2 p)

Lycka till!