Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MT054G	T100	2018-08-31

Kursnamn	Maskinteknik GR (A), Hållfasthetslära
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	H18
Ämne	Maskinteknik

8982538474

0028219

Tentamen i Hållfasthetslära

Fredagen den 31:e Augusti 2018

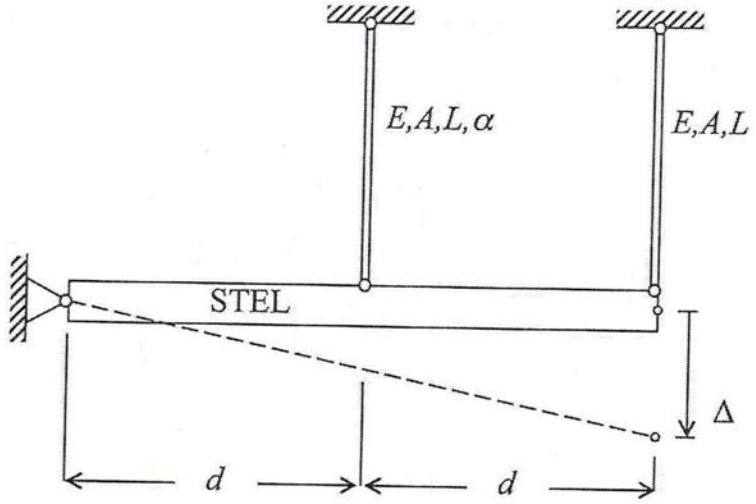
Hjälpmedel: KTH:s Formelsamling i Hållfasthetslära, matematisk handbok, Physics Handbook, utdelat kopierat utdrag ur KTH:s formelsamling, sammanställning över relevanta avsnitt i KTH:s formelsamling samt kalkylator. För godkänt krävs totalt 14 p.

Examinator Per A Gradin är anträffbar på telefon 070 6471517

Notera att i samtliga uppgifter där antaganden måste göras om deformationer, vinkeländringar etc så förutsätts dessa vara små.

Lösningarna ska redovisas på separat papper

Uppgift 1 (5p)

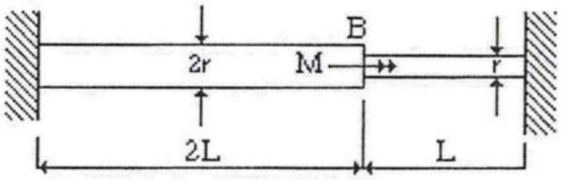


Ett stelt ok är enligt figuren upphängt i två linjärt elastiska stänger med E-modul E, tvärsnittsarea A och längden L. Den högra änden på oket belastas med en vertikal kraft så att man får en förskjutning Δ. Bestäm den vertikala kraft som behövs i den högra ändpunkten för att hålla Δ konstant om temperaturen höjs T° C i den vänstra stången som har temperaturutvidgningskoefficienten α.

Användbart samband: $\sigma = E(\varepsilon - \alpha T)$

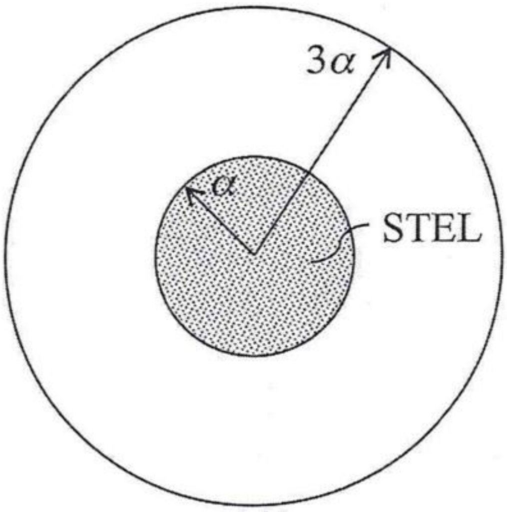
Uppgift 2 (5p)

En stång av ett linjärt elastiskt material (skjuvmodul G) och med varierande tvärsnitt (diameter $2r$ och r) enligt figuren nedan är fast inspänd i sina båda ändar och belastad med ett vridande moment M i punkten B.



Bestäm rotationen i B. Användbara samband: $\theta = ML/(GK)$, $K = \pi D^4/32$ där D är diametern.

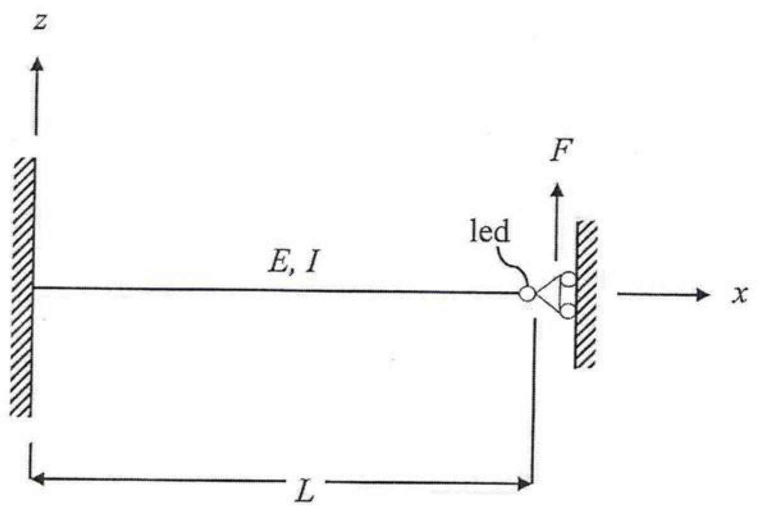
Uppgift 3 (5p)



En tunn cirkulär platta med innerradien α krymps på en stel axel med ytterradien $\alpha + \delta$ där $\delta << \alpha$. På skivans ytterrand ($r = 3\alpha$) sitter en trådtöjningsgivare som mäter töjningen ε i tangentiell led. Bestäm förhållandet mellan den mätta töjningen ε och det radiella greppet δ.

Användbara samband: se bifogat utdrag ur FS.

Uppgift 4 (5p)

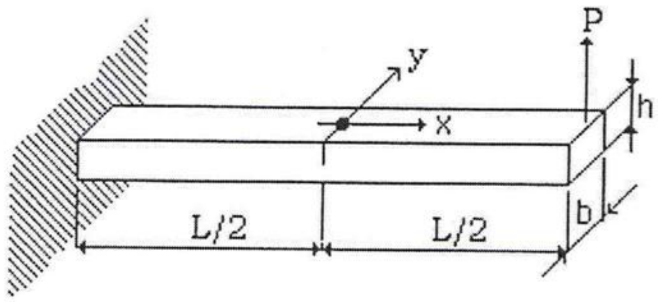


Bestäm utböjningen $w(x)$

Användbara samband: $w'''' = q/EI$, $w''' = -T/EI$, $w'' = -M/EI$

Uppgift 5 (5p)

På en konsolbalk med dimensioner enligt figuren så mäter man töjningen i x - och y - led i en punkt mitt på balken.



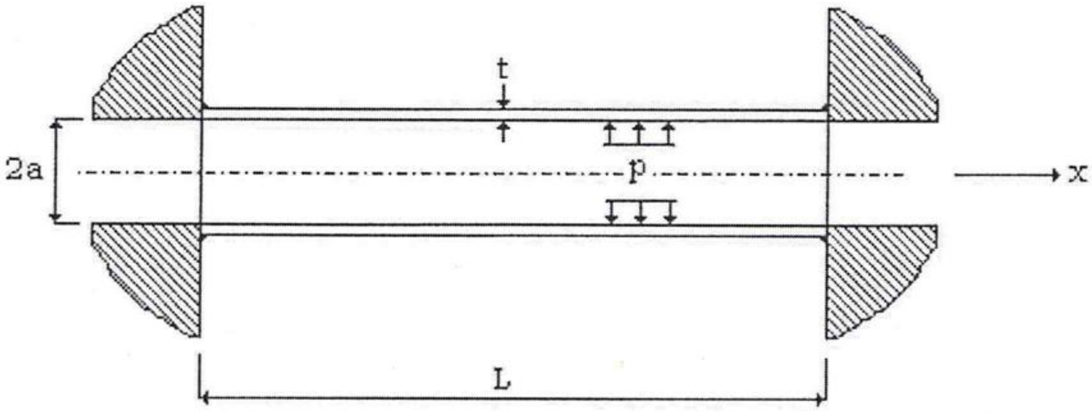
Om de uppmätta töjningarna är ε_x och ε_y, ange ett uttryck för materialets skjuvmodul dvs för $G = E/(2(1 + \nu))$.

I uttrycket skall ingå bara de relevanta storheter som definieras i texten eller i figuren

Användbart samband: $\sigma_{Max} = M/W_b$, $W_b = bh^2/6$

Uppgift 6 (5p)

Ett öppet (utan gavlar) tunnväggigt och långt ($L >> a, t$) linjärt elastiskt rör med elastiska konstanter E och ν är svetsat mellan två stela väggar enligt figuren och belastat med ett inre övertryck p. Det förutsätts att röret inte kan ändra sin längd i axiell riktning. På stort avstånd från gavlarna så mäts töjningen i tangentiell led ε_ϕ



Bestäm det inre övertrycket p uttryckt i de givna parametrar som är relevanta, om spänningen i tangentiell led ges av $\sigma_\phi = pa/t$

Användbara samband: se bifogat utdrag ur FS

3.2.2 Linjärt elastiska material

3.2.2.1 ISOTROPT MATERIAL

Hookes lag (för linjärt termoelastiskt material)

För ett homogent, isotropt, linjärt elastiskt material gäller, på flexibilitetsform, Hookes generaliserade lag som här kompletterats med termisk utvidgning

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T; & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T; & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T; & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} \end{cases} \tag{3.1}$$

där E = *elasticitetsmodulen*, ν = *Poissons konstant*, G = *skjuvmodulen*, α = *längdutvidgningskoefficienten* och ΔT = *temperaturökningen*

Mellan E, ν och G råder sambandet

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.2}$$

I de fall då Hookes lag gäller sammanfaller huvudspänningsriktningarna med huvudtöjningsriktningarna.

Löses spänningarna ur ekvation (3.1) erhålles Hookes lag på styvhetsform enligt

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}; & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}; & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \sigma_z = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}; & \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases} \tag{3.3}$$

Hookes lag vid plant spänningstillstånd

Låt en huvudspänning vara $\sigma_z = 0$, varmed $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu\sigma_y] + \alpha\Delta T; & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu\sigma_x] + \alpha\Delta T; & \gamma_{yz} = 0 \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}[\sigma_x + \sigma_y] + \alpha\Delta T; & \gamma_{zx} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

ilitetsform, Hookes

(3.1)

en, α = *längdut-*

(3.2)

arna med huvud-

sform enligt

(3.3)

(3.4)

eller löst med avseende på spänningarna

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}; & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}; & \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = 0; & \tau_{zx} = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Hookes lag vid plant deformationstillstånd

Låt en huvudtöjning vara $\varepsilon_z = 0$, varmed $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) + \alpha(1+\nu)\Delta T; & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) + \alpha(1+\nu)\Delta T; & \gamma_{yz} = 0 \\ \varepsilon_z = 0; & \gamma_{zx} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

eller löst med avseende på spänningarna

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}; & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}; & \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\varepsilon_x + \varepsilon_y] - \dfrac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}; & \tau_{zx} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Tensorformer för Hookes lag

På tensorform kan Hookes lag, med λ, μ enligt nästa sida, tecknas

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) + \delta_{ij}\alpha\Delta T \tag{3.8}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right] - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}G\delta_{ij}\alpha\Delta T \tag{3.9}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - (2\mu + 3\lambda)\delta_{ij}\alpha\Delta T \tag{3.10}$$

samt med användning av *spännings-* och *töjningsdeviatorer* och K enligt nästa sida

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3K} + 3\alpha\Delta T \qquad \textit{volymändring} \tag{3.11}$$

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} \qquad \textit{formändring} \tag{3.12}$$