Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA072G	Ö100	2018-08-30

Kursnamn	Matematik GR (A), Tillämpad matematik och matematisk stat...
Provnamn	Tentamen
Ort	Östersund
Termin	H18
Ämne	Matematik

MA072G

Mittuniversitetet
Avdelningen för matematik och ämnesdidaktik
Marianne Olsson Lindberg

Tentamen i Tillämpad matematik och matematisk statistik (7,5hp)

2018-08-30 kl. 08.00-13.00

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärde för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p (Max: 24p)
Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl.
Skriv tydliga och utförliga lösningar till alla uppgifter.
Hjälpmedel: Officiell formelsamling för Mittuniversitetets matematikkurser, bifogade formelblad samt miniräknare (ej symbolhanterande).

---

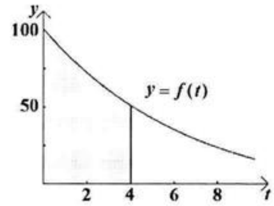
1. Bestäm derivatan till funktionerna.

   a) $f(x) = 2\ln 3x - x^{17}$ b) $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$ c) $f(x) = \left(x^5 - x^2 + 3\right)^4$ (3p)

2. Beräkna följande integraler med hjälp av primitiva funktioner:

   a) $\int_1^4 \left(2e^{0,1x} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ b) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x^4}\right)dx$ (2p)

   c) Antag att en vattentank läcker vatten med hastigheten $f(t)$ liter/min, där t är tiden i minuter. Tolka vad den skuggade arean i figuren betyder. (1p)



3. Givet är differentialekvationen $y' - 3y = 2xy$ med begynnelsevillkoret $y(1) = e^4$. (2p)
   Visa att $y = e^{3x+x^2}$ är en lösning till detta begynnelsevärdesproblem.

4. Ett tåg av typen X2000 startar från en station. Tågets hastighet framgår av tabellen nedan.

Tid (s)	0	10	20	30	40
Hastighet (m/s)	0	9	16	22	26

   a) Använd trapetsmetoden för att uppskatta hur långt tåget färdas de 40 första sekunderna. (1,5p)

   b) Funktionen $v(t) = 45\left(1 - e^{-0,022t}\right)$, där t är tiden i sekunder, ger en modell för hastigheten (i m/s) hos tåget de första minuterna. Beräkna med hjälp av denna funktion den sträcka tåget färdas de 40 första sekunderna. (1,5p)

   c) Beräkna tågets acceleration efter 15 sekunder, antingen med hjälp av tabellen eller med hjälp av funktionen från b-uppgiften. (1p)

5. En kastare i en mindre basebolliga är beryktad för att ta överdrivet lång tid på sig mellan kasten. Hans tid mellan kast är normalfördelad med väntevärde 36 sekunder och standardavvikelse 2,5 sekunder.

a) Hur stor är sannolikheten att tiden mellan två kast är längre än 40 sekunder? (1,5p)
b) Hur stor är sannolikheten att tiden mellan två kast är mellan 30 och 34 sekunder? (2p)

6. Antag att livslängden (i timmar) hos en viss typ av elektronrör är en kontinuerlig stokastisk variabel ξ med frekvensfunktionen nedan.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{100}{t^2}, & t > 100 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

a) Hur stor är sannolikheten att ett slumpvis valt elektronrör kommer att fungera mellan 200 och 300 timmar? (1p)
b) Hur stor är sannolikheten att ett slumpvis valt elektronrör kommer att fungera minst 200 timmar? (1,5p)

7. En tidigare studie påstod att vuxna boende i en viss region spenderade i genomsnitt 18 timmar per vecka på fritidsaktiviteter. En forskare ville testa detta påstående. Hon frågade 10 vuxna i regionen hur mycket tid de spenderade per vecka på fritidsaktiviteter. Deras svar (i timmar) var följande:

14 25 22 38 16 26 19 23 41 33

Antag att tiden som spenderas på fritidsaktiviteter är normalfördelad.

a) Bestäm två lägesmått och ett spridningsmått för siffermaterialet. (1,5p)
b) Testa, på signifikansnivån 5 %, nollhypotesen (från den tidigare studien) mot mothypotesen att tiden som spenderas på fritidsaktiviteter i den aktuella regionen är längre. Antag att standardavvikelsen är 8 timmar. (2p)

8. a) Bestäm ett konfidensintervall med konfidensgrad 0,95 för den genomsnittliga tiden per vecka som spenderas på fritidsaktiviteter av vuxna i regionen från uppgift 7. Antag att standardavvikelsen är 8 timmar. (1,5p)
b) Vad menas med att ett konfidensintervall för väntevärdet μ har konfidensgraden 0,95? (I alternativen nedan avses med *försöket* att ta ett stickprov och konstruera ett konfidensintervall. Ett eller flera alternativ kan vara korrekta.) (1p)

1. Om man genomför försöket många gånger innehåller intervallet μ i 95 % av fallen.
2. Om man genomför försöket många gånger innehåller intervallet i genomsnitt 95 % av observationerna.
3. Minst 95 % av observationerna faller inom intervallet.
4. Sett före försöket är det 95 % chans att intervallet kommer att hamna så att det innehåller μ.

A. Antag att funktionen $f(x) = c + 12x - 4x^3$ ska integreras över ett intervall av längd 1 som börjar i $x = c$. Hur ska c väljas för att minimera värdet av integralen om $-1 \leq c \leq 1$?

Normalfördelningen

Tabellen ger sannolikheten $\Phi(x) = P(\xi \leq x)$, där $\xi \in N(0,1)$.

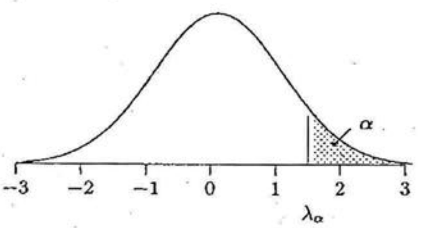
För negativa x-värden använd relationen $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.791	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.997	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Tabellen ger det λ_α-värde för vilket $P(\xi > \lambda_\alpha) = \alpha$, där $\xi \in N(0,1)$.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
λ_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

α	0.0005	0.0001	0.00005	0.00001	5.0×10^{-6}	1.0×10^{-6}
λ_α	3.2905	3.7190	3.8906	4.2649	4.4172	4.7534



Exponentialfördelningen $Exp(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Normalfördelningen $N(\mu,\sigma)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty<x<\infty$$

Väntevärdet för en kontinuerlig stokastisk variabel ξ:

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$$

Variansen för en kontinuerlig stokastisk variabel ξ med väntevärde $E(\xi)=\mu$:

$$V(\xi)=E\left((\xi-\mu)^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-\mu^2$$

Standardavvikelsen för en kontinuerlig stokastisk variabel ξ definieras som $\sqrt{V(\xi)}$.

Tvåsidigt konfidensintervall för μ med konfidensgrad $1-\alpha$, om vi har ett stickprov från en $N(\mu,\sigma)$-fördelning där σ är känd:

$$\left[\bar{x}-\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Regressionslinjen som ges av minsta kvadratmetoden är $y=a+bx$ där

$$a=\bar{y}-b\bar{x}, \quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$