



Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
M A 1 2 8 G	T 1 0 0	2 0 1 8 - 0 8 - 2 7
Kursnamn	Matematik GR (A), Algebra med funktionslära	
Provnamn	Tentamen	
Ort	Sundsvall	
Termin	H18	
Ämne	Matematik	

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 4) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p. Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

1. Fullständiga uträkningar krävs till följande uppgifter, det räcker ej att endast ange svaret.

- (a) Lös ekvationen $2x^2 - 12 = 5x$.
(b) Förenkla $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ så mycket som möjligt.
(c) Utveckla $(\frac{4x}{5} - 5y^3)^2$.
(d) Låt a och b vara reella tal. Förenkla uttrycket

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{a+b} + \frac{ab}{a(a+b)}$$

så mycket som möjligt.

(1 p)

2. Bestäm alla reella lösningar till följande olikheter:

- (a) $\frac{x^2 - 2x - 15}{x + 1} \leq 0$; (2 p)
(b) $|2 + 9x| > \frac{7}{3}$. (1 p)

3. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

- (a) $x + \sqrt{28 - 3x} = 8$; (1 p)
(b) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -1$; (1 p)
(c) $x^3 + 71x = 15x^2 + 105$. (1,5 p)

4. (a) Skriv uttrycket

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{34}$$

med hjälp av ett summatecken (Σ).

(1 p)

- (b) Beräkna summan $\sum_{k=7}^{26} (k+1)^2$. (1 p)

5. Betrakta mängderna

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 3x - 10 < 0\};$$

$$B = \{-2^n : n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 4\};$$

$$C = \{\sin x : x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Bestäm följande mängder. Visa dina uträkningar!

(a) A ;

(b) B ;

(c) $A \cap B$;

(d) $B \setminus C$.

(2 p)

6. (a) Primitalsfaktoriser heltalet 14742. Visa dina uträkningar!

(1 p)

(b) Bestäm största gemensamma delaren $\text{SGD}(14742, 7245)$. Visa dina uträkningar!

(1 p)

(c) Undersök om följande påståenden gäller för alla positiva heltal a, b och c . Om påståendet är sant krävs bevis, om det är falskt räcker det med ett motexempel.

i. $a|bc \Rightarrow a|c$.

(1 p)

ii. $bc|a \Rightarrow b|a$.

(1 p)

7. (a) Skriv komplexa talet

$$\frac{3 - 2i}{(6 - 4i)(2 + i)}$$

på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

(1 p)

(b) Låt $z = -1 + i$ och $w = 1 - 3i$. Bestäm $\left| \frac{z^{10}}{w^4} \right|$.

(1,5 p)

(c) Lös ekvationen $6z^4 - 5z^3 + 18z^2 - 20z - 24 = 0$ där $x \in \mathbb{C}$.

(2 p)

Visa dina uträkningar!

8. Funktionerna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2 - 6x + 2$ och $g(x) = 3x - 1$.

(a) Ange en funktionsregel för den sammansatta funktionen $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och förenkla så mycket som möjligt.

(1 p)

(b) Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 - 6x + 2$ och bestäm med hjälp av detta värdemängden V_f till f .

(1,5 p)

(c) Givet att g är surjektiv.

Visa att g är bijektiv och alltså har en invers $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(1 p)

(d) Ange en funktionsregel för $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(0,5 p)

A. Visa med ett induktionsbevis att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lycka till!