Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA075G	Ö100	2018-10-31

Kursnamn	Matematik GR (A), Linjär algebra I
Provnamn	Tentamen
Ort	Östersund
Termin	H18
Ämne	Matematik

8982538474

0028747

Tentamen i Linjär algebra 1, 7,5 hp, 2018-10-31, kl. 8:00–13:00

Kurskod: MA075G
Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Grafritande räknare som ej är symbolhanterande samt Matematisk formelsamling, upplaga 5.
Lärare: Jens Persson

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. En uppgift per blad, skriv endast på en sida. Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Maxpoäng är 24. Riktvärde för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. Obs! Studenter med godkänt på duggan eller på linjär algebra-delen av MA074G behöver ej göra uppgift 1.

1. Givet är matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna (om möjligt) AB. (0,5p)
b) Beräkna (om möjligt) BA. (0,5p)
c) Beräkna (om möjligt) $\det(A)$. (0,5p)
d) Beräkna (om möjligt) $\det(5A)$. (0,5p)
e) Beräkna (om möjligt) $\det(A^3)$. (0,5p)
f) Beräkna (om möjligt) A^{-1}. (0,5p)

I de fall då det inte är möjligt att genomföra beräkningen, förklara varför.

2. Givet är vektorerna $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

a) Visa att vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ inte är vinkelräta mot varandra. (0,5p)
b) Bestäm arean hos den triangel som vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänner upp. (0,5p)
c) Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. (0,5p)
d) Beräkna $\vec{u} \times \vec{v}$. (0,5p)
e) Bestäm alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$. (0,5p)

3. Givet är punkterna $P(2,-1,5)$, $Q(4,0,4)$, $R(-3,2,0)$ och $S(-3,1,4)$.

a) Bestäm på parameterform en ekvation för den linje som går genom punkterna P och Q. (1p)
b) Bestäm på normalform ekvationen för det plan som spänns upp av punkterna P, Q och R. (1p)
c) Bestäm avståndet mellan punkten S och planet $8x - 4y + z = 3$. Formeln given i formelsamlingen kan användas som hjälp för att kontrollera ditt svar, men för att erhålla full poäng krävs redovisning av resonemang och uträkningar som visar hur du har kommit fram till ditt resultat. (1,5p)

4. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -3x + 2y + 3z &= -2 \\ 9x + ay + 3z &= b \\ 3x + 2y + 3z &= 1 \end{cases}$$

a) exakt en lösning? (1p)
b) ingen lösning? (1p)
c) oändligt många lösningar? Lös systemet i detta eller dessa fall. (1p)

5. Givet är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & a \\ -1 & a & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) För vilka värden på konstanten a är matrisen A inverterbar? (1,5p)
b) Bestäm inversen A^{-1} till A när $a = -1$. (1,5p)

6. Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning man får genom att först spegla i x-axeln och sedan rotera 135° moturs (↺) och låt $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T_2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm standardmatrisen för T_1. Notera att bara svar ger inte full poäng. (1p)
b) Visa att T_1 är en inverterbar avbildning. Bestäm standardmatrisen för T_1^{-1}. (1p)
c) Bestäm standardmatrisen för T_2. (1p)

7. Givet är vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Visa att vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ och $\vec{v}_4$ bildar en bas i $\mathbb{R}^4$. (1,5p)
b) Skriv vektorn $\vec{w}$ som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ och $\vec{v}_4$. (1,5p)

8. Givet är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen A. (2,5p)
b) Avgör utifrån resultatet i deluppgift a) om matrisen A är inverterbar eller inte. (0,5p)

Lycka till!