



Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
M A 1 1 5 G	T 1 2 0	2 0 1 8 - 1 0 - 3 1
Kursnamn	Matematik GR (A), Algebra	
Provnamn	Skriftlig tentamen, Problemlösning	
Ort	Sundsvall	
Termin	H18	
Ämne	Matematik	

Skrivtid: 1,5 timmar

Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 5).

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda.

Riktvärdet för betyget G är 14 p.

1. Lös ekvationen $2x^2 - 3 = x$. (1 p)
2. Beräkna $\sqrt{24} - \sqrt{12} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$. (1 p)
3. Förenkla uttrycket $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-2}$ så mycket som möjligt. (2 p)
4. Skriv $\frac{8^{2x}}{2^3 \cdot 4^{3x}}$ som en potens av 4. (2 p)
5. Utveckla $(\frac{1}{2} - 2x^3)^2$. (1 p)
6. Bestäm alla reella tal a sådana att $\frac{\frac{3}{a} - \frac{a}{3}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{3}} = 0$. (2 p)
7. Betrakta mängderna A, B och C där
 $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2x - 7 > 0\}$, $B = [4, \infty[$, $C = \{x \in \mathbb{R} : (x - 4)^2 > 0\}$.
 Beräkna mängderna A , C , $A \cap B$, $A \cup C$ och $C \setminus B$. (5 p)
8. Beräkna kvot och rest enligt Divisionssatsen
 - (a) när 53 delas med 3; (1 p)
 - (b) när -53 delas med 5. (1 p)
9. Beräkna kvot och rest när reella polynomet
 $x^7 - 2x^5 - x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x - 1$ delas med $x^3 - 2x + 1$. (2 p)
10. Givet komplexa talen $z = 1 + 7i$ och $w = 2i - 7$.
 - (a) Ange $\frac{z}{w}$ och zw på formen $a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (4 p)
 - (b) Beräkna $\left| \frac{\overline{zw}}{w^2 z^2} \right|^2$. (2 p)

Lycka till!

Skriptid: 3 timmar

Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 5) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p. Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

1. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer och olikheter:

(a) $\frac{1-x}{x+3} > 3;$ (2 p)

(b) $|x^2 + 4| > 5;$ (1 p)

(c) $3^x - 3^{1-x} = 2;$ (2 p)

(d) $\sqrt{5x^2 + 4(5x + 4)} = x + 2.$ (2 p)

2. En av rötterna till polynomet

$$z^5 + 6z^4 + 8z^3 - 8z^2 + 4z + 40, \quad z \in \mathbb{C}$$

är $1 - i$. Bestäm de övriga rötterna. (3 p)

3. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen definierat genom $f(x) = x^2 + x\sqrt{12} + 9$.

(a) Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + x\sqrt{12} + 9$. (1 p)

(b) Beräkna $f(-\sqrt{3})$. (0,5 p)

(c) Bestäm värdemängden V_f till f . (1,5 p)

(d) Är f surjektiv? Motivera! (1 p)

(e) Visa att f inte är injektiv. (2 p)

4. (a) Är 589 ett primtal? Motivera! (1 p)
- (b) Primtalsfaktorisera talen 2100 och 7020 och bestäm då största gemensamma delaren $\text{SGD}(7020, 2100)$. (2 p)
- (c) i. Bestäm ett heltal a så att $5a + 3 \cdot 7 = 1$.
ii. För alla heltal n visa att det finns heltal s och t sådana att (2 p)

$$n = 5s + 7t.$$

5. (a) Skriv summan

$$\sum_{r=1}^4 \frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$$

utan summatecken och beräkna sedan summan. (1,5 p)

- (b) Skriv summan

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + \dots + 200 \cdot 401$$

med hjälp av summatecken. (1,5 p)

- A. Visa med ett induktionsbevis att

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lycka till!