Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA131G	S100	2019-01-10

Kursnamn	Matematik GR (A), Integralkalkyl
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	
Ämne	

Tentamen i Integralkalkyl, MA131G/MA132G

Datum: 2019-01-10
Skrivtid: 5 timmar
Lärare: Andreas Lind (070-6890822)
Avdelning: MOD
Hjälpmedel: Penna, linjal, godkänd miniräknare och Matematisk formelsamling upplaga 5.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida. Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22p, B 18p, C 14p, D 10p och E 9p.

1. Bestäm eller beräkna följande integraler.

   (*a*) $\int \frac{dx}{1+x^{1/3}}$. (1p)

   (*b*) $\int_0^{\pi/2} x\sin(x/2)$. (1p)

   (*c*) $\int_0^1 xe^{x^2}$. (1p)

2. (*a*) Visa, på valfritt sätt, att volymen av en kon med basytan B och höjden H ges av

   $$V = \frac{B \cdot H}{3}.$$

   (1p)

   (*b*) Använd skivmetoden för att visa att klotets volym ges av

   $$V = \frac{4\pi R^3}{3},$$

   där R betecknar klotets radie. (2p)

3. Betrakta ellipsen E given av $x^2 + 4y^2 = 4$.

   (*a*) Parametrisera ellipsen E på valfritt sätt, dvs bestäm en kurva $x(t)$, $y(t)$ som beskriver E. Beräkna sedan kurvans båglängd. (1.5p)

   (*b*) Bestäm den ytarea som vi får när vi roterar E kring x-axeln. (1.5p)

4. (*a*) Bestäm lösningen till differentialkalkylen

   $$\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

   (1.5p)

   (*b*) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

   $$y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}.$$

   (1.5p)

5. Betrakta den bestämda integralen $I = \int_1^2 \ln(x)dx$.

   (*a*) Använd Trapetsmetoden och Mittpunktsmetoden för att bestämma M_2, T_2, M_4, T_4 och T_8. (I dessa uträkningar är det tillräckligt att svara med fyra decimaler). (1p) (*b*) Beräkna I exakt, och använd feluppskattningen för T_n för att uppskatta T_8. Jämför uppskattningen med skillnaden mellan det exakta värdet för I och T_8. Kom ihåg att

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2},$$

där K är den konstant så att $|f''(x)| \leq K$. (2p)

6. Avgör om serierna i (*a*) och (*b*) konvergerar eller ej.

   (*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$. (1p)

   (*b*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$. (1p)

   (*c*) Då man släpper en elastisk boll så studsar den upp 3/4 av höjden den faller. Om bollen släpps från 2 meter, hur lång totalsträcka kommer bollen studsa då? Motivering med bild krävs. (2p).

7. Beräkna arean för det område som ligger inuti $r = \sqrt{\theta}$ för $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Här betecknar r en polär kurva. Rita en bild! (2p)

8. Betrakta följande integraler.

   (*a*) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin(\sqrt{|x|})dx$. Är detta en generaliserad bestämd Riemannintegral? Beräkna, eller avgör om integralen divergerar. (1.5p)

   (*b*) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{6x+4}{x^3+x^2-2}dx$. Detta är en generaliserad Riemannintgral. Avgör om integralen konveregerar eller divergerar. Om integralen konvergerar, beräkna integralen. (Ledning: $x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2+2x+2)$) (1.5p)