Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA087G	T100	2019-01-10

Kursnamn	Matematik GR (B), Matematisk statistik
Provnamn	Tentamen
Ort	Sundsvall
Termin	
Ämne	

6895642268

Utskriven 2019-01-14 kl. 13:54:10

Tentamen i matematik | **Mittuniversitetet**
Matematisk statistik (MA087G/MA097G) | MOD
10 januari 2019 | Stefan Borell

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Matematisk formelsamling (Upplaga 5) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för godkända betyg är A 38,5 p, B 33 p, C 26 p, D 22 p och E 18 p.

---

1. a) Ange definitionen av att två händelser A och B är oberoende.

   b) Givet att händelserna A och B är oberoende, bevisa att händelserna A^* och B^* också är oberoende.

   c) Tre mätinstrument, numrerade 1, 2 och 3, fungerar med sannolikhet 0,9, 0,8 respektive 0,4. Man väljer slumpmässigt ut ett instrument. Givet att det valda instrumentet visar sig fungera, vad är sannolikheten att det är instrument nr 3? (6 p)

2. I en fabrik tillverkas en produkt, som kan få tillverkningsfel av tre olika slag: A, B och C. Dessa tre fel uppträder oberoende av varandra och med respektive sannolikheter 20 %, 5 % och 10 %. En producerad enhet väljs på måfå för kontroll.

   a) Vad är sannolikheten för att den inte har något av dessa tre fel?

   b) Vad är sannolikheten för att den har felen A och C, men inte B?

   c) Man är intresserad av hur många av de tre slags felen som förekommer samtidigt i en producerad enhet och låter X beteckna detta antal. Bestäm sannolikhetsfunktionen till X och beräkna väntevärde samt standardavvikelse. (6 p)

3. Den stokastiska variabeln X antar värdena $0, 1, 2, 3$. Man gjorde 4096 oberoende observationer av X och fick följande resultat.

Observation	0	1	2	3
Antal	1 764	1 692	552	88

   Pröva på signifikansnivån 1 % hypotesen att $X \in \mathrm{Bin}(3, 1/4)$. (5 p)

4. Vid ett parkeringshus betalas dels en fast avgift om 10 kr vid varje parkeringstillfälle och dessutom en rörlig avgift om 5 kr/timme proportionellt mot parkeringstidens längd. Det antal timmar en kund har sin bil parkerad är en stokastisk variabel X med täthetsfunktionen $f_X(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

   a) Hur mycket är kundens förväntade parkeringsavgift?

   b) Vad är sannolikheten att kunden betalar åtminstone 20 kr i avgift?

   c) Antag att tre kunder har oberoende parkeringstider och låt den stokastiska variabeln Y vara den kortaste parkeringstiden. Bestäm fördelningsfunktionen för Y och beräkna sannolikheten att alla tre parkerar längre än 1 timme. (7 p)

5. Med en mätmetod bestämmer man avståndet mellan två punkter vid fyra upprepade mätningar. Resultatet (enhet: meter)

   1 456,3   1 458,5   1 457,7   1 457,2

   kan betraktas som ett slumpmässigt stickprov från $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, där μ är det verkliga avståndet och standardavvikelsen σ är ett mått på mätmetodens precision.

   a) Antag att det är känt att $\mu = 1\,457{,}0$. Beräkna skattningen

   $$s^2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(x_j - \mu)^2$$

   av σ^2. Bevisa även att skattningen är väntevärdesriktig.

   b) Ange en väntevärdesriktig skattning av σ^2 under förutsättning att väntevärdet μ är okänt. Beräkna även denna skattning.

   OBS: Väntevärdesriktighet ska ej bevisas i b)-uppgiften.

   c) Är antagandet om normalfördelning väsentligt för väntevärdesriktigheten i någon av de två skattningarna ovan? Motivera ditt svar. (6 p)

6. Vikten (enhet: gram) av en slumpmässigt vald magnecyltablett är en stokastisk variabel med väntevärdet 0,65 och standardavvikelse 0,02.

   a) Använd Centrala gränsvärdessatsen för att uppskatta sannolikheten att 100 slumpmässigt valda magnecyltabletter väger högst 65,3 gram.

   b) En ask med magnecyltabletter bör innehålla 100 tabletter. Påfyllning av en ask sker tablettvis till dess att tabletternas gemensamma vikt överstiger 65 gram. Beräkna sannolikheten att en ask innehåller åtminstone 100 tabletter med hjälp av Centrala gränsvärdessatsen.

   Tips: Asken innehåller åtminstone 100 tabletter precis då vikten av 99 tabletter understiger 65 gram. (7 p)

7. En fysiker har gjort 5 mätningar för att bestämma en fysikalisk konstant μ. Mätningarna kan anses vara observationer på oberoende, normalfördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och känd standardavvikelse. Hen fick ett 90 % konfidensintervall $7{,}02 \leq \mu \leq 7{,}14$. Hur många mätningar skulle behövas för att få ett konfidensintervall med

   a) konfidensgrad 90 % som är hälften så brett?

   b) konfidensgrad 99 % och av samma bredd?

   c) konfidensgrad 99 % som är hälften så brett? (5 p)

Lycka till!