



## Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
M A 1 2 8 G	T 1 0 0	2 0 1 9 - 0 1 - 1 1
Kursnamn	Matematik GR (A), Algebra med funktionslära	
Provnamn	Tentamen	
Ort	Sundsvall	
Termin		
Ämne		

*Skrivtid:* 5 timmar

*Hjälpmedel:* Matematisk formelsamling (Upplaga 5) samt godkänd, ej symbolhanterande miniräknare.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är A 22 p, B 18 p, C 14 p, D 10 p och E 9 p. Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

1. Fullständiga uträkningar krävs till följande uppgifter, det räcker ej att endast ange svaret.

(a) Lös andragradsekvationen Lös ekvationen  $3x^2 - 2 = 5x$ .

(b) Utveckla  $(\frac{1}{3} - 3x^5)^2$ .

(c) Skriv  $\frac{2 \cdot 8^{2x}}{2^{3x} \cdot 16^x}$  som en potens av 4.

(d) Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt:

$$\frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x^4 - 1} - \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

(1 p)

2. Bestäm alla reella lösningar till följande olikheter:

(a)  $\frac{(2 - x)^2}{x + 5} > 1 - x$ ;

(2 p)

(b)  $|3x + 2| \geq 18$ .

(1 p)

3. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

(a)  $\sqrt{3x + 4} = 6x - 7$ ;

(1 p)

(b)  $2 \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = \sqrt{3}$ ;

(1,5 p)

(c)  $(\log_2(x + 3) - 2)(\log_3(x + 2) - 3) = 0$ ;

(1,5 p)

(d)  $36x^5 + 48x^4 - 11x^3 - 45x^2 - 24x - 4 = 0$ .

(2 p)

4. (a) Skriv summan

$$\sum_{r=1}^4 \frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$$

utan summatecken och beräkna sedan summan.

(1 p)

- (b) Skriv summan

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + \dots + 200 \cdot 401$$

med hjälp av summatecken.

(1 p)

5. Betrakta mängderna  $A, B$  och  $C$  där

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2x - 7 > 0\}, \quad B = [4, \infty[, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : (x - 4)^2 > 0\}.$$

Beräkna mängderna  $A, C, A \cap B, A \cup C$  och  $C \setminus B$ .

(2,5 p)

6. (a) Primtalsfaktorisera talen 11700 och 17472 och bestäm då största gemensamma delaren SGD(11700, 17472).

(1 p)

- (b) Visa att för primtal  $p \geq 5$  gäller att  $p^2 - 1$  är delbart med 3.

(1,5 p)

7. (a) Givet komplexa talen  $z = 1 + 7i$  och  $w = 2i - 7$ .

- i. Ange  $\frac{z}{w}$  och  $zw$  på formen  $a + ib$ , där  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(1 p)

- ii. Beräkna  $\left| \frac{\overline{zw}}{w^2 z^2} \right|^2$ .

(1 p)

- (b) En av rötterna till polynomet

$$2z^5 - 9z^4 + 32z^3 - 54z^2 + 70z - 25, \quad z \in \mathbb{C}$$

är  $1 + 2i$ . Bestäm de övriga rötterna.

(2 p)

8. Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktionerna definierade genom

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{och} \quad g(x) = 3x^2 - 5x - 2.$$

- (a) Bestäm värdemängden till  $g$ .

(1 p)

- (b) Bestäm en funktionsregel för  $g \circ f$  och förenkla uttrycket så mycket som möjligt.

(1,5 p)

- (c) Visa att  $g \circ f$  inte är injektiv.

(0,5 p)

- A. Visa med ett induktionsbevis att

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

för alla heltal  $n \geq 1$ .

Lycka till!