Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA075G	Ö100	2019-01-14

Kursnamn	Matematik GR (A), Linjär algebra I
Provnamn	Tentamen
Ort	Östersund
Termin	
Ämne	

6895642268

Utskriven 2019-01-11 kl. 10:31:21

Lotta Flodén, Jens Persson, Cornelia Schiebold
Mittuniversitetet 2019-01-14

Tentamen i

Linjär algebra I, MA073G och MA075G

Hjälpmedel: *Grafritande räknare som ej är symbolhanterande samt Matematisk formelsamling, upplaga 5.*

Skrivtid: *5 timmar*

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärde för betygen är:
E: 9p D: 10p C: 14p B: 18p A: 22p
Aspektuppgiften markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

Lycka till!

---

1. Betrakta följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 1, \\ 3x - 2y + 2z &= -1, \\ -2x + 2y + az &= b. \end{aligned}$$

a) För vilka värden på konstanterna a, b är systemet inkonsistent? För vilka värden finns det exakt en lösning, för vilka värden finns det oändligt många lösningar?

b) Bestäm den allmänna lösningen i det fall att det finns oändligt många lösningar. (3p)

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lös matrisekvationen $AXB = C$ för en okänd 2×2 matris X.

b) Beräkna determinanterna till $-3AB$ och B^9. (3p)

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & a & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) För vilka värden på konstanten a är matrisen A inverterbar?

b) Bestäm inversen till A för $a = 2$. (3p)

4. Givet är de två vektorerna

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

b) Bestäm arean av parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

c) Hitta alla vektorer med längden 1 som är vinkelräta mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. (3p)

5. Givna är punkterna $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (0, -1, -3)$ och planet $\pi : y - 2z = -1$.

a) Hitta en parameterframställning för den linje ℓ som innehåller punkterna P_1 och P_2.

b) Bestäm skärningen mellan linjen ℓ och planet π. (3p)

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm egenvärdena till matrisen A.

b) Bestäm egenrummet till varje egenvärde. (3p)

7. Låt $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara linjära avbildningar. Avbildningen T_1 är given genom $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \end{pmatrix}$ och för avbildningen T_2 gäller att

$$T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm $T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $T_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Bestäm standardmatriserna för avbildningarna T_1 och T_2.

c) Bestäm standardmatrisen för avbildningen man får genom att först använda T_1 och sen T_2. (3p)

8. Givet är vektorerna

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Avgör om vektorerna $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ och $\mathbf{u_3}$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$.

b) Skriv vektorn $\mathbf{s}$ som en linjär kombination av $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ och $\mathbf{u_3}$ om det är möjligt. (3p)

A. (Frivillig) Betrakta linjen $\ell : x - 3y = 0$ i $\mathbb{R}^2$. Given en godtycklig vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$, skriv $\mathbf{v}$ som en summa av en vektor som är vinkelrät mot ℓ och en vektor som är parallell med ℓ.