Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Försättsblad Prov Original

Kurskod	Provkod	Tentamensdatum
MA134G	Ö100	2019-03-22

Kursnamn	Matematik GR (A), Envariabelanalys 2
Provnamn	Tentamen
Ort	Östersund
Termin	
Ämne	

Tentamen i Envariabelanalys 2, 7,5 hp, 2019-03-22

Kurskod: MA134G
Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Grafritande räknare som ej är symbolhanterande samt Matematisk formelsamling, upplaga 5.
Lärare: Anders Holmbom, Marianne Olsson Lindberg

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. En uppgift per blad, skriv endast på en sida. Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärde för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

1. a) Derivera $f(x) = \sqrt{4x^2 - x} + \frac{\ln(x)}{x^3}$. (1p)
   b) Ekvationen $x^2y^3 + xy = 12$ definierar en kurva i planet. Bestäm dess lutning i punkten (3,1). (1p)
   c) Bestäm inversderivatan $(f^{-1})'(1)$ för funktionen $f(x) = e^{2x} + x^7$. (1p)

2. a) Lös differentialekvationen $x^2y' + 3xy = x^3,\ x > 0$. (1p)
   b) Lös differentialekvationen $y' = xy^2\sin(x^2)$. (1,5p)
   c) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 12y = 4e^{2x}$. (1,5p)

3. a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 kring $x = 0$ för $f(x) = \ln(1 + 2x)$. (1,5p)
   b) Använd Taylorpolynomet i a) för att approximera $\ln(1{,}1) = f(0{,}05)$. (0,5p)

4. a) Bestäm integralen $\int_1^3 x^3\ln(x)dx$ (1p)
   b) Beräkna integralen $\int_0^{2\pi} \frac{2x^2+33}{x^2+16}dx$ (1,5p)
   c) Beräkna, om möjligt, den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+3)^2}dx$ (1,5p)

5. a) Beräkna båglängden av parameterkurvan

$$\begin{cases} x(t) = e^t - t \\ y(t) = 4e^{\frac{t}{2}} \end{cases},\quad 0 \leq t \leq 3$$

   Tips: $(x'(t))^2 + (y'(t))^2$ är en jämn kvadrat. (1,5p)

   b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan kurvan $y = x^2 + 1$ och linjen $y = -x + 3$ roterar kring x-axeln. (1,5p)

Vänd!

c) Beräkna, om möjligt, volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{x}}}$, linjen $x = 2$ och de positiva koordinataxlarna roterar kring x-axeln. (1p)

6. a) Avgör huruvida serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$ konvergerar eller divergerar. (1p)

   b) Avgör huruvida serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k\sqrt{k}}$ konvergerar eller divergerar. (1p)

7. a) Skissa kardioiden $r = 1 + \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, och cirkeln $r = \cos(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. (1p)

   b) Beräkna arean av det område som ligger inuti kardioiden men inte inuti cirkeln. *Tips*: Arean A hos området mellan $r = r(\theta)$, $\theta = \alpha$ och $\theta = \beta$ ges enligt formeln

   $$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(r(\theta)\right)^2 d\theta.$$ (2,5p)

8. En enveten telning till en uttröttad småbarnsförälder kommer en dag på att det skulle vara gott med glass efter middagen, varför denne börjar tjata om detta. Efter 20 minuter ger föräldern, som först inte var på samma linje, upp och det blir glass till efterrätt. Detta upprepas nästa dag och även de följande dagarna, och nu tar det bara 95 % av tiden det tog dagen innan för telningen att få sin vilja igenom. Hur lång tid kommer totalt att läggas på tjat om glass om man antar att detta fortgår oändligt många dagar? (1,5p)

Uppgift A

En student som läser en kurs i matematik (där man kan anta att allt är nytt för studenten) lär sig nytt material i kursen med en hastighet (andel av kursinnehållet/vecka) som är proportionell mot den andel hen har kvar att lära sig. Låt proportionalitetskonstanten vara k. Dessvärre glömmer hen samtidigt stoff från kursen med en hastighet som är proportionell mot den andel hen kan för tillfället. Här är proportionalitetskonstanten $k/3$. Kursen går under 8 veckor. Efter 2 veckor ligger studenten i fas, och kan alltså precis en fjärdedel av kursinnehållet. Om det krävs att man behärskar minst hälften av kursinnehållet för att klara tentan (som alltså går efter 8 veckor) – kommer studenten att bli godkänd?

Lycka till!